پاسخنامه تشریحی

۱ با توجه به مشابه بودن کره‌ها، پس از بسته شدن کلید، بار الکتریکی هر یک از دو کره برابر خواهد شد با:

$$q=\frac{q_۱+q_۲}{۲}=\frac{۸-۱۰}{۲}=-۱\mu C$$

یعنی از کرهٔ با بار $-۱۰\mu C$ به مقدار $-۱۰-(-۱)=-۹\mu C$ بار به کرهٔ دیگر منتقل می‌شود:

$$|\Delta q|=۹\mu C$$

$$|\bar{I}|=\frac{|\Delta q|}{\Delta t}=\frac{۹\times ۱۰^{-۶}}{۰/۰۰۱}=۹\times ۱۰^{-۳}A$$

۲ با توجه به اینکه نمودار یک خط راست است، جریان مستقیم است و در تمام بازه‌های زمانی جریان متوسط ثابت است:

$$\bar{I}=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{۴C-۰}{۲s-۰}=\frac{۴C}{۲s}=۲A$$

۳ برای به دست آوردن مقاومت در هر ولتاژ باید از رابطهٔ $R=\frac{V}{I}$ استفاده کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} R=\frac{V}{I}\Rightarrow R_۴=\frac{۴V}{۴mA}=\frac{۴V}{۴\times ۱۰^{-۳}A}=۱۰۰۰\Omega \\ R=\frac{V}{I}\Rightarrow R_۲=\frac{۲V}{۱mA}=\frac{۲V}{۱\times ۱۰^{-۳}A}=۲۰۰۰\Omega \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{R_۴}{R_۲}=\frac{۱۰۰۰\Omega}{۲۰۰۰\Omega}=\frac{۱}{۲}$$

همان‌طور که می‌بینید، مقاومت برای یک دیود نوری ثابت نیست و با تغییر ولتاژ، تغییر کرده است.

۴ گام اول: ابتدا مقاومت این قطعه سیم را با استفاده از رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$ به دست می‌آوریم:

$$R=\rho\frac{L}{A}=۱۰^{-۶}\Omega\cdot m\times\frac{۲m}{۰/۲\times ۱۰^{-۶}m^۲}=۱۰\Omega$$

گام دوم: حالا توان مصرفی را به دست می‌آوریم:

$$P=\frac{(\Delta V)^۲}{R}=\frac{(۲۰۰V)^۲}{۱۰\Omega}=۴۰۰۰W=۴kW$$

گام سوم: توجه کنید که چون توان را برحسب کیلووات داریم، اگر زمان را برحسب ساعت به دست آوریم، به راحتی می‌توانیم انرژی مصرفی را برحسب کیلووات ساعت حساب کنیم:

$$\Delta t=۲۰min=\frac{۱}{۳}h$$

بنابراین انرژی مصرفی برحسب کیلووات ساعت برابر است با:

$$U=P\Delta t=۴kW\times\frac{۱}{۳}h=\frac{۴}{۳}kWh$$

۵ برای به دست آوردن توان خروجی اصلاً کار سختی نداریم:

$$P_{\text{خروجی باتری}}=\varepsilon I-rI^۲=(۱۲V)(۲A)-(۲\Omega)(۲A)^۲=۲۴W-۸W=۱۶W$$

برای به دست آوردن توان مصرفی در مقاومت هم کار سختی نداریم:

$$P_{\text{مصرفی مقاومت}}=RI^۲=(۴\Omega)(۲A)^۲=۱۶W$$

همان‌طور که براساس پایستگی انرژی انتظار داریم، توان مصرفی در مقاومت برابر توان خروجی در باتری است. این به معنای این است که انرژی تولیدشده در باتری در مقاومت مصرف می‌شود.

۶ گام اول: ابتدا مقاومت R را به دست می‌آوریم:

$$R=\frac{V}{I}=\frac{۲۴V}{۱۲V}=۲\Omega$$

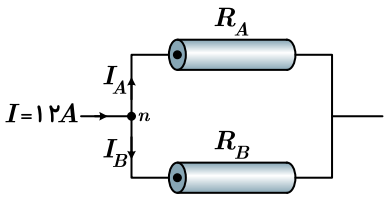
گام دوم: مقاومت معادل بین دو نقطهٔ B و C را به دست می‌آوریم:

$$R_{eq}^{BC}=۴\Omega+۲\Omega+۱۰\Omega=۱۶\Omega$$

گام سوم: حالا اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه را با استفاده از رابطهٔ $V_{BC}=IR_{eq}^{BC}$ محاسبه می‌کنیم:

$$V_{BC}=IR_{eq}^{BC}=(۱۲A)(۱۶\Omega)=۱۹۲V$$

۷ ابتدا شکل سوال را رسم می‌کنیم تا بفهمیم با چه مسئله‌ای سر و کار داریم:



جریان I وقتی به گرهٔ n می‌رسد، به نسبت عکس مقاومت‌ها بین آنها تقسیم می‌شود:

$$\frac{I_A}{I_B}=\frac{R_B}{R_A}=\frac{\rho_B\frac{l_B}{A_B}}{\rho_A\frac{l_A}{A_A}}\xrightarrow{l_A=l_B\ ,A_A=A_B}\frac{I_A}{I_B}=\frac{\rho_B}{\rho_A}=\frac{۴\times ۱۰^{-۸}\Omega\cdot m}{۲\times ۱۰^{-۸}\Omega\cdot m}=۲$$

پس $\frac{I_A}{۲}=I_B$ است. از طرفی می دانیم $I=I_A+I_B$ است؛ بنابراین:

$$I=I_A+I_B=I_A+\frac{۱}{۲}I_A=\frac{۳}{۲}I_A\Rightarrow ۱۲A=\frac{۳}{۲}I_A\Rightarrow I_A=۸A$$

---

۸ الف) با توجه به رابطهٔ $\frac{P_۲}{P_۱}=\frac{R_۱}{R_۲}$ داریم:

$$\frac{P_۲}{P_۱}=\frac{R_۱}{R_۲}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج طرف چپ ضرب در } t}\frac{P_۲t}{P_۱t}=\frac{E_۲}{E_۱}=\frac{R_۱}{R_۲}\Rightarrow\frac{۳۲}{۱۶}=\frac{R}{۸\Omega}\Rightarrow ۲=\frac{R}{۸\Omega}\Rightarrow R=۱۶\Omega$$

ب) جریان گذرنده از مقاومت ۸ اهمی را می‌توانیم از $U_۲=R_۲I_۲^۲t$ به دست آوریم:

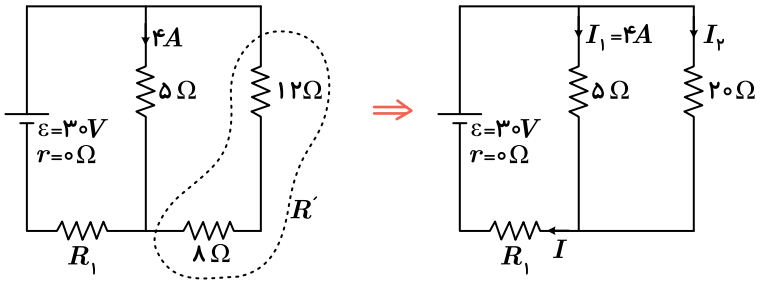
$$U_۲=R_۲I_۲^۲t\Rightarrow ۳۲J=(۸\Omega)\times I^۲\times(۱s)\Rightarrow I^۲=\frac{۳۲}{۸}=۴\Rightarrow I=۲A$$

---

۹ برای اینکه توان مصرفی در $R_۱$ را به دست بیاوریم، باید $R_۱$ و جریان عبوری از آن را داشته باشیم که هیچ‌کدام را نداریم. به همین خاطر اول به سراغ به دست آوردن این دو مقدار می‌رویم.

مقاومت‌های ۱۲ و ۸ اهمی با هم متوالی‌اند؛ پس، به‌جای آنها مقاومت معادلشان را قرار می‌دهیم:

$$R'=۱۲\Omega+۸\Omega=۲۰\Omega$$



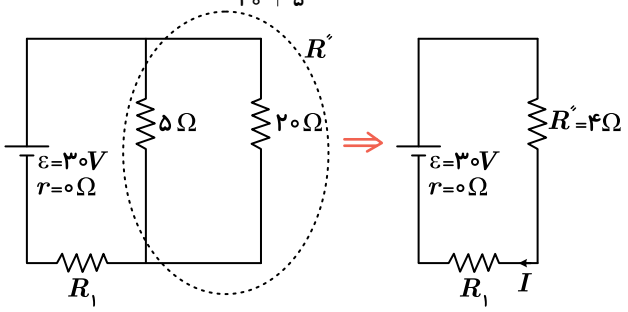
حالا جریان عبوری از مقاومت ۲۰ اهمی را به دست می آوریم:

$$\frac{۲۰\Omega}{۵\Omega}=\frac{I_۱}{I_۲}\Rightarrow ۴=\frac{۴A}{I_۲}\Rightarrow I_۲=۱A$$

حالا جریان کل عبوری از مدار را به دست می‌آوریم که همان جریان عبوری از $R_۱$ است:

$$I=I_۱+I_۲=۴A+۱A=۵A$$

برای به دست آوردن مقدار $R_۱$، از مقدار جریان عبوری از مدار تک‌حلقه یعنی $I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ کمک می‌گیریم. ε، I و r را داریم، R_{eq} به دست می‌آید. با محاسبهٔ R_{eq} به‌راحتی $R_۱$ به دست می‌آید؛ چون، طبق شکل زیر $R_۱$ با مجموعه مقاومت‌های ۲۰ و ۵ اهمی متوالی است. مقاومت‌های ۲۰ و ۵ اهمی با هم موازی هستند و معادل آنها $R''=\frac{۲۰\times ۵}{۲۰+۵}=۴\Omega$ است:



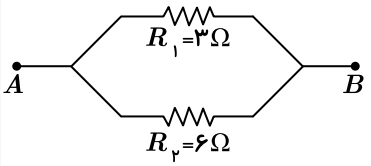
$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\Rightarrow ۵A=\frac{۳۰V}{(۴\Omega+R_۱)+۰}\Rightarrow ۴\Omega+R_۱=۶\Omega\Rightarrow R_۱=۲\Omega$$

حالا می‌توانیم توان مصرفی $R_۱$ را به دست آوریم:

$$P_۱=R_۱I^۲\Rightarrow P_۱=(۲\Omega)(۵A)^۲=۲\times ۲۵=۵۰W$$

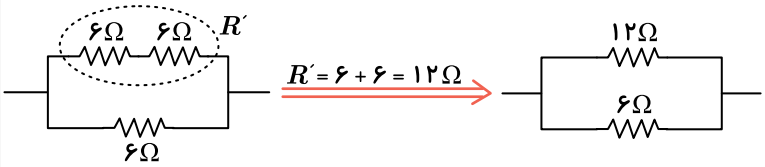
---

۱۰ دو سر مقاومت $R_۳$ با یک سیم به هم وصل شده است؛ بنابراین، دو سر آن اتصال کوتاه شده و مطابق شکل روبه‌رو از مدار حذف می‌شود؛ به این ترتیب، فقط مقاومت‌های موازی $R_۱$ و $R_۲$ در مدار هستند و مقاومت معادل آنها برابر است با:



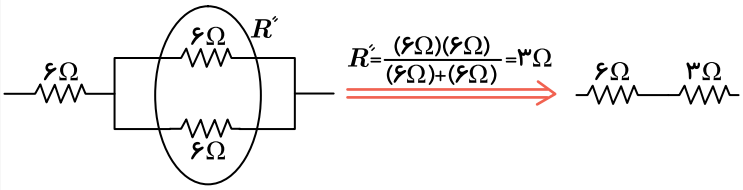
$$\frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}=\frac{۱}{۳\Omega}+\frac{۱}{۶\Omega}=\frac{۲}{۶\Omega}+\frac{۱}{۶\Omega}=\frac{۳}{۶\Omega}\Rightarrow R_{eq}=\frac{۶\Omega}{۳}=۲\Omega$$

۱۱ در شکل (۱) دو مقاومت شاخهٔ بالایی با هم متوالی و معادل آنها با مقاومت شاخهٔ پایینی موازی است.



$$R_{eq}^{(۱)}=\frac{(۱۲\Omega)(۶\Omega)}{۱۲\Omega+۶\Omega}=۴\Omega$$

در شکل (۲) ابتدا دو مقاومت موازی را تبدیل به یک مقاومت می‌کنیم. با این کار، مقاومت معادل آنها با مقاومت سمت چپ متوالی می‌شود:

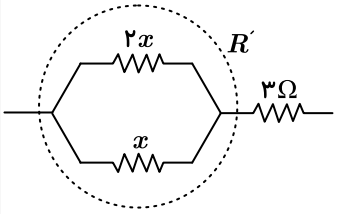


$$R_{eq}^{(۲)}=۶\Omega+۳\Omega=۹\Omega$$

بنابراین $\frac{R_{eq}^{(۱)}}{R_{eq}^{(۲)}}$ برابر است با:

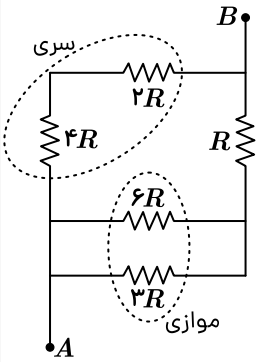
$$\frac{R_{eq}^{(۱)}}{R_{eq}^{(۲)}}=\frac{۴\Omega}{۹\Omega}=\frac{۴}{۹}$$

۱۲ دو مقاومت $۲x$ و x با هم موازی و مجموعهٔ آنها با مقاومت ۳ اهمی متوالی است؛ بنابراین، با توجه به شکل زیر داریم:



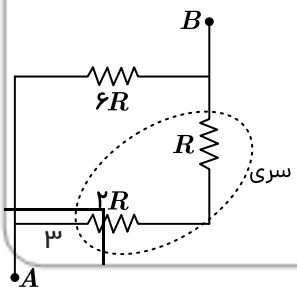
$$R'=\frac{۲x\times x}{۲x+۲x}=\frac{۲x^۲}{۳x}=\frac{۲}{۳}x\Rightarrow R_{eq}=R'+۳\Omega$$
$$\Rightarrow ۷\Omega=R'+۳\Omega\Rightarrow R'=۷\Omega-۳\Omega=۴\Omega$$
$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}x=۴\Omega\Rightarrow x=\frac{۴\Omega}{\frac{۲}{۳}}=۶\Omega$$

۱۳ مدار داده‌شده در شکل را به‌صورت زیر در چند مرحله ساده می‌کنیم:



$۴R$, $۲R$: $۲R+۴R=۶R$ سری هستند.

$۶R$, $۳R$: $\frac{۳R\times ۶R}{۳R+۶R}=۲R$ موازی هستند.



$۲R$, R : $۲R+R=۳R$ سری هستند.

$۳R$, $۶R$: $\frac{۶R\times ۳R}{۶R+۳R}=۲R$ موازی هستند.

$$V = IR \Rightarrow V = \frac{\varepsilon R}{R+r} = \frac{۲۴ \times ۸}{۸+۴} = ۱۶\ V$$

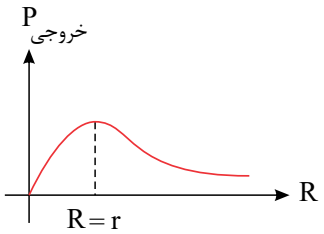
۱۵ ابتدا معادله را به‌صورت استاندارد $V = \varepsilon - rI$ در می‌آوریم:

$$I = \frac{-۲}{۳}V + \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۲}{۳}V = -I + \frac{۱}{۶} \Rightarrow V = \frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۲}I \Rightarrow \varepsilon = \frac{۱}{۴}V\ ,\ r = \frac{۳}{۲}\Omega$$

بیشترین توان مولد در حالتی است که $R = r$ باشد:

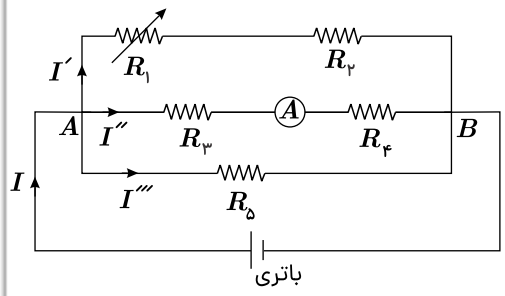
$$P_{max} = \frac{\varepsilon^۲}{۴r} = \frac{(\frac{۱}{۴})^۲}{۴ \times \frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۹۶}W$$

۱۶ مطابق نمودار رسم‌شده توان مصرف‌شده در مقاومت R و یا توان مفید مولد زمانی بیشینه است که $R = r$ باشد، حال اگر با افزایش R اندازهٔ آن به r نزدیک شود، توان مفید مولد هم افزایش می‌یابد. در غیر این صورت توان مفید کاهش می‌یابد. بنابراین در این شرایط، توان خروجی (مفید) ممکن است افزایش یا کاهش بیابد و یا حتی ثابت بماند.



۱۷

گام ۱: مدار را به این شکل در نظر می‌گیریم:



گام ۲: از این که عدد آمپرسنج (با توجه به ثابت ماندن اعداد $R_۳$ و $R_۴$) تغییر نکرده می‌توان فهمید که مقاومت درونی باتری صفر بوده است:

$$V_{AB} = V_{\text{باتری}} = \varepsilon - r\underbrace{I}_{\text{کاهش}} = \text{ثابت} \Rightarrow r = ۰ \Rightarrow V_{AB} = \varepsilon \rightarrow I'' = \frac{V_{AB}}{R_{۳,۴}} = \text{ثابت}\ I''' = \frac{V_{AB}}{R_۵} = \text{ثابت}$$

$$R_۱ \uparrow \Rightarrow R_{eq} \uparrow \Rightarrow I \downarrow \ \Rightarrow \downarrow I = I' + \underbrace{I'' + I'''}_{\text{ثابت}} \Rightarrow \downarrow I = I' + \text{عدد ثابت} \Rightarrow I' \downarrow \Rightarrow V_{R_۲} = \underbrace{R_۲}_{\text{ثابت}} I' \downarrow \Rightarrow V_{R_۲} \downarrow$$

$$\text{گام ۳} \rightarrow \underbrace{V_{AB}}_{\text{ثابت}} = V_{R_۱} + \underbrace{V_{R_۲}}_{\text{کاهش}} \Rightarrow V_{R_۱} \uparrow$$

۱۸

$$\text{گام ۱} \Rightarrow \text{در حال اول}: \begin{cases} I = \dfrac{\varepsilon}{r + \frac{۴}{۳R}} \rightarrow I = \dfrac{\varepsilon}{\frac{۲}{۳}R + \frac{۴}{۳}R} = \dfrac{\varepsilon}{۲R} \\ R_{eq} = R + \dfrac{R \times \frac{R}{۲}}{R + \frac{R}{۲}} = R + \dfrac{\frac{R^۲}{۲}}{\frac{۳}{۲}R} = R + \dfrac{R}{۳} = \dfrac{۴}{۳}R \end{cases}$$

$$\text{گام ۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{عدد آمپرسنج} = (\dfrac{R}{\frac{R}{۲} + R})(\dfrac{\varepsilon}{۲R}) = \dfrac{۲}{۳}\dfrac{\varepsilon}{۲R} = \dfrac{\varepsilon}{۳R} \rightarrow I_۱ = \dfrac{\varepsilon}{۳R} \\ \text{عدد ولت‌سنج} = RI = R(\dfrac{\varepsilon}{۲R}) = \dfrac{\varepsilon}{۲} \rightarrow V_۱ = \dfrac{\varepsilon}{۲} \end{cases}$$

گام ۳ ⇐ تعویض جای ولت‌سنج و آمپرسنج

ب

$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \rightarrow I = \frac{۲۴}{۱۰+۲} = ۲A \qquad P = RI^{۲} \Rightarrow P = ۱۰ \times ۲^{۲} = ۴۰W$

۲۰

$R' = \frac{۶ \times ۳}{۶+۳} = ۲ \ , \ R_{eq} = ۲ + ۴ = ۶\Omega$

$I_{(۴\Omega)} = I_{eq} \rightarrow I_{eq} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{۱۲}{۶} = ۲A$

$P = I^{۲}R \rightarrow P = ۴ \times (۲)^{۲} = ۱۶$